TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI HỌC KỲ II NĂM HỌC 2019-2020
Môn: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH VÀ CTĐS
Mã môn học: MATH143001
Đề thi có 02 trang
Ngày thi: 21/7/2020 Thời gian: 90 phút
Sinh viên được phép sử dụng tài liệu.

Câu 1 (3.0 *điểm*). Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & -4\\ 0 & 1 & 2 & -5\\ 2 & 5 & 4 & -3\\ -3 & -7 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

a. Tìm phân tích LU của ma trận *A*.

b. Sử dụng phép phân tích trên để giải hệ phương trình Ax = b, trong đó $b=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$

c. Tìm một cơ sở và số chiều của Col*A*, Nul*A*.

Câu 2 (1.0 *điểm*). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho tập $W=\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| x_1-3x_3=0\right\}$. Chứng minh rằng *W* là không gian con của $\mathbb{R}^3$. Tìm một cơ sở và số chiều của *W*.

Câu 3 (1.0 *điểm*). Trong không gian R³, cho các véctơ $u_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix};u_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix};y=\begin{pmatrix}-1\\2\\6\end{pmatrix}$

Chứng minh tập $\{u_1,u_2\}$ là tập trực giao . Tìm hình chiếu trực giao của y lên $Span\{u_1,u_2\}$.

Câu 4 (1.0 điểm). Cho $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ và $E=\{v_1,v_2,v_3\}$ là các cơ sở của không gian véctơ V. Giả sử $u_1=6v_1-2v_2+v_3,\ u_2=9v_1-4v_2-v_3,\ u_2=2v_1-v_2+3v_3$. Tìm véctơ tọa độ $[x]_E$ với $x=-3u_1+2u_2-2u_3$

Câu 5 (3.0 *điểm*). Cho dạng toàn phương

$$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=4x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2,\ \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}^T\in\mathbb{R}^3.$$

a. Đưa dạng toàn phương $f(\mathbf{x})$ về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao, chỉ rõ phép biến đổi.

b. Tìm $\det\left[(4A^TA)^{2020}\right];\ A^{2020}$.

Câu 6: (1.0 *điểm*).

Trong $\mathbb{Z}_{26}$ với hệ thống mật mã Hill cho khóa $K=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Hãy mã hóa từ **HATE,** biết rằng mỗi ký tự trong bảng chữ cái tương ứng một số trong $\mathbb{Z}_{26}$ được cho bởi bảng sau:

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**

Ghi chú: Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)	Nội dung kiểm tra
[CĐR G2.3]: Thực hiện được các phép toán ma trận, tính được định thức, các phép biến đổi sơ cấp, tìm hạng ma trận, tìm được ma trận nghịch đảo, giải được hệ phương trình tuyến tính (giải bằng tay hay bằng cách sử dụng máy tính có cài đặt phần mềm ứng dụng phù hợp như matlab, maple, …) và biết ứng dụng vào các mô hình tuyến tính.	Câu 1
[CĐR G2.4]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về không gian véctơ, không gian Euclide như: chứng minh không gian con; xác định một vectơ có là tổ hợp tuyến tính của một hệ vectơ; xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của một hệ vectơ; tìm cơ sở, số chiều của một không gian vectơ; tìm tọa độ của một vectơ đối với một cơ sở, tìm ma trận đổi cơ sở; phương pháp Gram-Schmidt để xây dựng hệ vectơ trực giao từ một hệ vectơ độc lập tuyến tính,…	Câu 2, Câu 3, Câu 4
[CĐR G2.5]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về ánh xạ tuyến tính, chéo hóa ma trận, dạng toàn phương: tìm nhân, ảnh, ma trận, hạng của ánh xạ tuyến tính; tìm trị riêng, véctơ riêng, chéo hóa ma trận; xét dấu dạng toàn phương; đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.	Câu 5
[CĐR G2.6]: Xây dựng phép toán hai ngôi; xét xem tập hợp với phép toán hai ngôi cho trước có là nhóm, vành, trường hay không; mã hóa, phát hiện lỗi, sửa sai, …	Câu 6

Ngày 15 tháng 7 năm 2020

Bộ môn phê duyệt

(ký và ghi rõ họ tên)

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI HỌC KỲ II NĂM HỌC 2019-2020

Môn: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH VÀ CTĐS

Mã môn học: MATH143001

Đề thi có 02 trang.

Ngày thi: 21/7/2020 Thời gian: 90 phút.

Sinh viên được phép sử dụng tài liệu.

ĐÁP ÁN

Câu 1 (3.0 *điểm*). Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}1&3&3&-4\\0&1&2&-5\\2&5&4&-3\\-3&-7&-5&2\end{pmatrix}$.

a. Tìm phân tích LU của ma trận A.

b. Sử dụng phép phân tích trên để giải hệ phương trình Ax = b, trong đó $b=\begin{pmatrix}1&2&0&1\end{pmatrix}^T$

c. Tìm một cơ sở và số chiều của Col$A$, Nul$A$.

Giải:

a)

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3&-4\\0&1&2&-5\\2&5&4&-3\\-3&-7&-5&2\end{pmatrix}\xrightarrow[d_3:=d_3+3d_1]{d_2:=d_2-2d_1}\begin{pmatrix}1&3&3&-4\\0&1&2&-5\\0&-1&-2&5\\0&2&4&-10\end{pmatrix}\xrightarrow[d_4:=d_4-2d_2]{d_3:=d_3+d_2}\begin{pmatrix}1&3&3&-4\\0&1&2&-5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ **(0.5)**

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3&-4\\0&1&2&-5\\2&5&4&-3\\-3&-7&-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&-1&1&0\\-3&2&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&3&3&-4\\0&1&2&-5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=LU$$ **(0.5đ)**

b) Ta có $\text{Ax}=b\Leftrightarrow L\text{Ux}=b\Leftrightarrow\begin{cases}Ly=b & (1)\\Ux=y & (2)\end{cases}$

$$(1)\ Ly=b\ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&-1&1&0\\-3&2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$$ **(0.5đ)**

$$(2)\ Ux=y\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&3&3&-4\\0&1&2&-5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+3x_2+3x_3-4x_4=1\\x_2+2x_3-5x_4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-5+3b-11a\\x_2=2-2b+5a\\x_3=b\\x_4=a\end{cases}\quad(a,b\in R)$$

(0.5đ)

c)

+ Cơ sở của ColA là $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\1\\5\\-7\end{pmatrix}\right\}$; $\dim ColA = 2$ **(0.5)**

+ $\mathbf{Ax} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ \quad x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -11a + 3b \\ x_2 = 5a - 2b \\ x_3 = b \\ x_4 = a \end{cases}$

$NulA = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-11\\5\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$. Cơ sở của NulA là $\left\{\begin{pmatrix}-11\\5\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$; $\dim NulA = 2$ **(0.5)**

Câu 2 (1.0 *điểm*). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho tập $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 - 3x_3 = 0\}$. Chứng minh rằng W là không gian con của $\mathbb{R}^3$. Tìm một cơ sở và số chiều của *W*.

Giải:

$W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 - 3x_3 = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) = (3a; b; a)\} = \{a(3;0;1) + b(0;1;0)\} = Span\{u_1; u_2\}$. Nên W là không gian con của R³. **(0.5)**

Một cơ sở của W là $\{(3;0;1);(0;1;0)\}$, dimW =2 **(0.5)**

Câu 3 (1.0 *điểm*). Trong không gian R³, cho các véctơ $u_1 = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}; u_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix}-1\\2\\6\end{pmatrix}$

Chứng minh tập $\{u_1, u_2\}$ là tập trực giao. Tìm hình chiếu trực giao của y lên $Span\{u_1, u_2\}$.

Giải:

$u_1.u_2 = 0$ nên tập $\{u_1, u_2\}$ là tập trực giao **(0.25đ)**

$\hat{y} = \frac{y.u_1}{u_1.u_1}.u_1 + \frac{y.u_2}{u_2.u_2}.u_2 = \frac{7}{14}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + \frac{-15}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\6\end{pmatrix}$ **(0.75đ)**

Câu 4 (1.0 điểm). Cho $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $E = \{v_1, v_2, v_3\}$ là các cơ sở của không gian véctơ V. Giả sử $u_1 = 6v_1 - 2v_2 + v_3$, $u_2 = 9v_1 - 4v_2 - v_3$, $u_3 = 2v_1 - v_2 + 3v_3$.Tìm véctơ tọa độ $[x]_E$ với $x = -3u_1 + 2u_2 - 2u_3$

Giải:

$$u_1=6v_1-2v_2+v_3\to[u_1]_E=\begin{pmatrix}6\\-2\\1\end{pmatrix};\ u_2=9v_1-4v_2-v_3\to[u_2]_E=\begin{pmatrix}9\\-4\\-1\end{pmatrix}$$

$$u_3=2v_1-v_2+3v_3\to[u_3]_E=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\to P_{E\leftarrow B}=\begin{pmatrix}6&9&2\\-2&-4&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}$$ (0.5)

$$x=-3u_1+2u_2-2u_3\to[x]_B=\begin{pmatrix}-3\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$[x]_E=P_{E\leftarrow B}.[x]_B=\begin{pmatrix}6&9&2\\-2&-4&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\-11\end{pmatrix}$$ (0.5)

Câu 5 (3.0 *điểm*). Cho dạng toàn phương

$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=4x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2,\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}^T\in\mathbb{R}^3.$

a. Đưa dạng toàn phương $f(\mathbf{x})$ về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao, chỉ rõ phép biến đổi.

b. Tìm $\det\left[(4A^TA)^{2020}\right]$

Giải:

a. Ma trận của dạng toàn phương $A=\begin{pmatrix}4&1&0\\1&4&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ **(0.25đ)**

$$\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}4-\lambda&1&0\\1&4-\lambda&0\\0&0&5-\lambda\end{vmatrix}\Leftrightarrow\lambda=5\vee\lambda=3$$ **(0.25đ)**

$+\ \lambda=5:(A-5I)X=0$

$$\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$-x_1+x_2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=b\\x_2=b\\x_3=a\end{cases}$$

Cơ sở của không gian con riêng $E(\lambda=5)$: $\left\{u_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};u_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, Cơ sở trực giao của không gian con riêng $\left\{v_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};v_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\right\}$ **(0.5)**

$+\ \lambda=3:(A-3I)X=0$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-a\\x_2=a\\x_3=0\end{cases}$$

Cơ sở của không gian con riêng $E(\lambda=3):\left\{u_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, cơ sở trực chuẩn của không gian con riêng $E(\lambda=3):\left\{v_3=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\right\}$ **(0.5đ)**

Đặt $P=[\mathbf{e}_1\quad \mathbf{e}_2\quad \mathbf{e}_3]$, $D=\operatorname{diag}(5,5,3)$, $\mathbf{x}=P\mathbf{y}$ **(0.25đ)**

ta có $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=\mathbf{y}^TD\mathbf{y}=5y_1^2+5y_2^2+3y_3^2$, $\mathbf{y}=[y_1\quad y_2\quad y_3]^T\in\mathbb{R}^3$. **(0.25đ)**

b. $\det\left[(4A^TA)^{2020}\right]=\left[\det(4A^TA)\right]^{2020}=\left[4^3\det A^T.\det A\right]^{2020}=(4^3)^{2020}(\det \mathbf{A})^{4040}=4^{6060}.75^{4040}$ **(0.5đ)**

$$A^{2020}=PDP^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^{2020}&0&0\\0&5^{2020}&0\\0&0&3^{2020}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1/2&1/2&0\\-1/2&1/2&0\end{pmatrix}$$ **(0.5đ)**

Câu 6: (1.0 *điểm*). Trong $\mathbb{Z}_{26}$ với hệ thống mật mã Hill cho khóa $K=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$. Hãy mã hóa từ **HATE**, biết rằng mỗi ký tự trong bảng chữ cái được tương ứng một số trong $\mathbb{Z}_{26}$ được cho bởi bảng sau:

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**

Giải:

$$\begin{pmatrix}H\\A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\H\end{pmatrix}$$ (0.5)

$$\begin{pmatrix}T\\E\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}19\\4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}19\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}Y\\B\end{pmatrix}$$ (0.5)

Vậy từ **HATE** được mã hóa thành từ **OHYB**

Ghi chú: Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)	Nội dung kiểm tra
[CĐR G2.3]: Thực hiện được các phép toán ma trận, tính được định thức, các phép biến đổi sơ cấp, tìm hạng ma trận, tìm được ma trận nghịch đảo, giải được hệ phương trình tuyến tính (giải bằng tay hay bằng cách sử dụng máy tính có cài đặt phần mềm ứng dụng phù hợp như matlab, maple, …) và biết ứng dụng vào các mô hình tuyến tính.	Câu 1
[CĐR G2.4]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về không gian véctơ, không gian Euclide như: chứng minh không gian con; xác định một vectơ có là tổ hợp tuyến tính của một hệ vectơ; xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của một hệ vectơ; tìm cơ sở, số chiều của một không gian vectơ; tìm tọa độ của một vectơ đối với một cơ sở, tìm ma trận đổi cơ sở; phương pháp Gram-Schmidt để xây dựng hệ vectơ trực giao từ một hệ vectơ độc lập tuyến tính,…	Câu 2, Câu 3, Câu 4
[CĐR G2.5]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về ánh xạ tuyến tính, chéo hóa ma trận, dạng toàn phương: tìm nhân, ảnh, ma trận, hạng của ánh xạ tuyến tính; tìm trị riêng, véctơ riêng, chéo hóa ma trận; xét dấu dạng toàn phương; đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.	Câu 5
[CĐR G2.6]: Xây dựng phép toán hai ngôi; xét xem tập hợp với phép toán hai ngôi cho trước có là nhóm, vành, trường hay không; mã hóa, phát hiện lỗi, sửa sai, …	Câu 6

Ngày 15 tháng 7 năm 2020

Bộ môn phê duyệt

(ký và ghi rõ họ tên)